Sur les Corps

1) ***Corps*** : (K, +, •) est un corps si :

(K1) (K, +) est un groupe commutatif de neutre 0_K ou 0 (ou e_+) dit l'élément ***Zéro*** de K

(K2) (K*, •) est un groupe commutatif de neutre 1_K ou 1(ou $e_\bullet$) dit ***l'élément Unité*** ou le ***Un*** de K.

(K3) • est distributive par rapport à +.

Où K* = K\{0} (K privé du neutre de la première loi)

Par la suite $K^\times$ désigne le groupe commutatif (K*, •)

N.B. Noter que la première loi est abusivement notée additivement, et la deuxième loi multiplicativement.

N.B. Si nous avons seulement (K*, •) est seulement un groupe, on dira que (K, +, •) est un anneau de division. Par exemple, l'ensemble des quaternions $\mathbb{H}$ est un anneau de division (corps non commutatif)

Pour la nomenclature un corps est un anneau de division commutatif.

N.B. si 0 =1 le corps K sera réduit à 0 : K = {0}

Tout corps non nul contient 0 et 1 donc son cardinal est plus que 2 : $\#(K) \geq 2$.

2) ***Sous-Corps*** : Toute partie L de K est appelée sous-corps de (K, +, •) si :

$+_L$ qui désigne : $L\times L \longrightarrow L,\ (x, y) \longmapsto x + y$

Et

$\bullet_L$ qui désigne : $L\times L \longrightarrow L,\ (x, y) \longmapsto x\bullet y$

Nous avons : (K, $+_L$, $\bullet_L$) est un corps.

Nous dirons que L est un corps pour les lois induites de celles de K.

N.B. Tout sous corps possède le même ***Zéro*** et le même ***Un*** que le corps.

N.B. Tout corps est en particulier un anneau commutatif intègre.

3) ***Corps premier*** : C'est tout corps qui n'a pas de sous corps.

$\mathbb{Q}$ est un corps premier,

Si K est de caractéristique 0, le plus petit sous corps de K est $\mathbb{Q}$.

Si K est fini, il est de caractéristique p entier premier, et il est isomorphe au corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Si p est premier, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps premier.

4) ***Morphisme de corps*** : Soit (K, +, $\bullet$) et (L, +, $\bullet$) deux corps où dans les deux la première loi est abusivement notée additivement, et la deuxième loi multiplicativement.
Soit $\varphi : K \longrightarrow L$ une application, on dit qu'elle est un morphisme de corps si :

$$\text{(M1)}\quad \varphi(x_1 + x_2) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2)$$

$$\text{(M2)}\quad \varphi(x_1 \bullet x_2) = \varphi(x_1) \bullet \varphi(x_2)$$

N.B. Nous pouvons en déduire comme dans le cas d'un groupe :

$$\varphi(0) = 0,\ \varphi(1) = 1,\ \varphi(-x^{-1}) = -\varphi(x),\ \varphi(x^{-1}) = \varphi(x)^{-1}.$$

5) ***Noyau et Jus d'un morphisme*** :

Ker$(\varphi) = \{ x \in K \mid \varphi(x) = 0 \}$ est le noyau de φ.

Jus$(\varphi) = \{ x \in K \mid \varphi(x) = 1 \}$ est le jus de φ.

N.B. φ est injective équivaut à ***Ker***$(\varphi) = \{0\}$, ***Jus***$(\varphi) = \{1\}$

6) ***Morphisme de l'anneau $\mathbb{Z}$ dans l'anneau K, et caractéristique du corps K*** :

Soit $\varphi: \mathbb{Z} \longrightarrow K : n \longmapsto n\bullet 1$
Où :

$n\bullet 1_K = 1_K + 1_K + \ldots + 1_K$ (n termes copies de ***Un*** de K) lorsque $n>0$.

$n\bullet 1 = (-1_K) + (-1_K) + \ldots + (-1_K)$ (n termes copies de l'opposé de ***Un*** de K) lorsque $n<0$.

$0_{\mathbb{Z}} \bullet 1_K = 0_K$
φ est bien un morphisme d'anneaux.

Notons ***Ker***(φ) le noyau de φ considéré comme un morphisme de groupes, nous remarquons :

1° Si ***Ker***$(\varphi) = \{0\}$: c'est-à-dire φ injective, $\mathbb{Z}$ est isomorphe à un sous anneau de K. On dira que K est de caractéristique 0, et on écrira ***Car***(K) = 0.

Exemple : $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ sont de caractéristique 0.

2° Si Ker$(\varphi) \neq \{0\}$: Ker(φ) est un idéal non trivial de $\mathbb{Z}$, il existe un $n>0$ dans N tel que

$n\bullet 1_K = 0_K$. On dira que K est de caractéristique n, nous écrivons ***Car***(K) = n.

Exemple : $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sont de caractéristique p (p naturel premier).

7) ***Théorème*** : Tout morphisme de corps est nul ou injectif :
Preuve :
Soit $\varphi : K \longrightarrow L$ un morphisme de corps, le morphisme nul étant :

$$\zeta_{K,L} : K \longrightarrow L,\ x \longmapsto 0, \text{ si } \varphi \neq \zeta_{K,L} \text{ il existe x tel que } \varphi(x) = a \neq 0.$$

Soit x_1, x_2 des éléments de K tel que : $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$
Nous aurons $\varphi(x_1 - x_2) = 0$. Posons $b = x_1 - x_2$.
Si b n'est pas nul (dans le corps K) il est nécessairement inversible :

$$1 = \varphi(1) = \varphi(b.b^{-1}) = \varphi(b)\varphi(b^{-1}) = 0.\varphi(b^{-1}) = 0 \text{ (dans L)}$$

Ce qui veut dire L = {0} et que tout $\varphi : K \longrightarrow L$ est nul, contrairement à l'hypothèse.
Donc b = 0 et donc $x_1 = x_2$.

8) ***Les automorphismes d'un corps de caractéristique 0***.

K étant de caractéristique 0, $\mathbb{Q}$ est plongé dans K par un monomorphisme φ,

$$\frac{p}{q} \cong (p.1_K).(q.1_K)^{-1}.$$

Tout automorphisme de K doit conserver $\mathbb{Q}$ point par point.

Ainsi l'ensemble des automorphismes ***Aut***($\mathbb{Q}$) = $\{Id_K\}$

9) ***Elément algébrique sur un corps***.

Soit (K, +, •) un corps et a un élément de K, on dit que a est algébrique sur K si :

Il existe un polynôme non nul P de $\mathbb{Z}[X]$ tel que $\widetilde{P}(a) = 0$, autrement dit : a est racine d'un polynôme non nul à coefficients entiers.

Exemple : $\sqrt{3}$ est algébrique (élément de $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{C}$) : Il annule le polynôme non nul P = $1.X^2 + 0X - 3$.

π n'est pas algébrique (ainsi que π + 2, e, et e + π)

10) ***Polynôme minimal d'un élément algébrique a***.

Un élément algébrique a, possède un polynôme de plus petit degré qui l'annule, celui-ci est appelé polynôme minimal de a. des fois noté μ_a :

$$\mu_{\sqrt{3}} = X^2 - 3$$

Exercice : donner le polynôme minimal de $a = \sqrt{3} + \sqrt{2}$

11) ***Théorème*** : Tout morphisme de corps $\varphi : K \longrightarrow L$ transforme tout élément algébrique en un élément algébrique.

Preuve : Soit b = φ (a) où a est algébrique par le polynôme P : $\widetilde{P}(a) = 0$,

Si $P = c_0 + c_1X + \ldots\ldots + c_jX^j + \ldots\ldots c_sX^s$.

Alors $\widetilde{P}(a) = c_0 + c_1a + \ldots\ldots + c_ja^j + \ldots\ldots + c_sa^s = 0$,

Et $0 = \varphi(0) = \varphi(\widetilde{P}(a) = \varphi(c_0 + c_1a + \ldots\ldots + c_ja^j + \ldots\ldots + c_sa^s) =$

$$\varphi(c_0) + \varphi(c_1a) + \ldots\ldots + \varphi(c_ja^j) + \ldots\ldots + \varphi(c_sa^s) =$$
$$\varphi(c_0) + \varphi(c_1)\varphi(a) + \ldots\ldots + \varphi(c_j)\varphi(a^j) + \ldots\ldots + \varphi(c_s)\varphi(a^s) =$$
$$\varphi(c_0) + \varphi(c_1)\varphi(a) + \ldots\ldots + \varphi(c_j)\varphi(a)^j + \ldots\ldots + \varphi(c_s)\varphi(a)^s =$$
$$\varphi(c_0) + \varphi(c_1)b + \ldots\ldots + \varphi(c_j)b^j + \ldots\ldots + \varphi(c_s)b^s = P^{\varphi}(b)$$

Où:

$$P^{\varphi} = \varphi(c_0) + \varphi(c_1)X + \ldots\ldots + \varphi(c_j)X^j + \ldots\ldots + \varphi(c_s)X^s$$

P^{φ} est à coefficients images d'entiers par un morphisme de corps, ce sont donc des entiers et par suite b = φ (a) est algébrique.

K étant un corps commutatif de caractéristique différente de 2 ($1_K + 1_K \neq 0_K$) dont le groupe multiplicatif sera noté $K^{\times}$.

12) ***Polynômes quadratiques*** : $K[X] = K[X_1, X_2,\ldots, X_n]$ désigne l'algèbre des polynômes à n indéterminées sur K. $H_2[X] = H_2[X_1, X_2,\ldots, X_n]$ désigne l'ensemble des polynômes homogènes de degré 2, à *n* indéterminées sur K
Soit $f(X) = f(X_1, X_2,\ldots, X_n)$ un polynôme homogène de degré 2 sur K :

On a : $f = f(X_1, X_2,\ldots, X_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} X_i X_j$, $M = (a_{i,j})$ est une matrice carré d'ordre n sur K : $M \in \mathcal{M}_n(K)$.

M s'écrit d'une façon unique comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique : $M = M_s + M_t$. $M_s = (s_{i,j})$, $M_t = (t_{i,j})$.

$$s_{i,j} = \frac{a_{i,j} + a_{j,i}}{2} \quad t_{i,j} = \frac{a_{i,j} - a_{j,i}}{2}$$

Avec ceci $a_{i,j} = s_{i,j} + t_{i,j}$.

$$\mathcal{M}_n(K) = \mathcal{MS}_n(K) \oplus \mathcal{MA}_n(K).$$

On remarque : la transposée de M : $M^t = M_s - M_t$.

En revenant aux polynômes : on pose $f_s = \sum_{i,j=1}^{n} s_{i,j} X_i X_j$ et $f_t = \sum_{i,j=1}^{n} t_{i,j} X_i X_j$

$f = f_s + f_t$ et $H_2[X] = HS_2[X] \oplus HA_2[X]$

À chaque f on fait correspondre une application :

$$Q_f : K^n \longrightarrow K \text{ définie par :}$$

$$(x_1, x_2,\ldots, x_n) \longmapsto Q_f(x_1, x_2,\ldots, x_n) = f(x_1, x_2,\ldots, x_n)$$

L'ensemble de ces applications Q_f (notée aussi $\tilde{f}$) sera noté $\mathcal{Q}uad_K(K^n)$

$$\mathcal{Q}uad_K(K^n) \subset K^{K^n}$$

Où K^{K^n} désigne l'ensemble de toutes les applications de K^n dans K.

A chaque f on fait correspondre $B_f : K^n \times K^n \longrightarrow K$ définie par :

$B_f(x, y) = \sum_{i,j=1}^{n} s_{i,j} x_i y_j$ calculé à partir de la composante symétrique du polynôme *f* :

L'ensemble de ces applications sera noté $\mathcal{B}il_K(K^n, K^n)$ $\mathcal{B}il_K(K^n, K^n) \subset K^{K^n \times K^n}$

On remarque que

$$Q_f(x + y) - Q_f(x) - Q_f(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x_i + y_i)(x_j + y_i) - \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} x_i x_j - \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} y_i y_j =$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} x_i x_j \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} x_i y_j + \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} y_i x_j + \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} y_i y_j - \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} x_i x_j - \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} y_i y_j =$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} x_i y_j + \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} y_i x_j =$$

$$2 \sum_{i,j=1}^{n} s_{i,j} x_i y_j = 2\, B_f(x,y)$$

$$Q_f(x + y) - Q_f(x) - Q_f(x) = 2\, B_f(x,y)$$

Le corps K étant de ***caractéristique*** différente de 2 :

$$\boxed{B_f(x,y) = \frac{1}{2}\{Q_f(x+y) - Q_f(x) - Q_f(x)\}}$$

Soit E un K-ev muni d'une forme quadratique q, on le note (E, q), et b(x, y) la forme bilinéaire correspondante

$q(x + y) = b(x, y) + b(y, x) + b(x, y) + b(y, y) = q(x) + q(y) + b(y,x) + b(y, x).$

$q(x + y) = q(x) + q(y) + 2b(y, x)$

$$2b(y, x) = q(x + y) - q(x) - q(y)$$

$$b(y, x) = \frac{1}{2}[q(x + y) - q(x) - q(y)]$$

13) ***Immersion de E dans une algèbre*** : Soit A une K-algèbre contenant E muni d'une forme quadratique *q*.

Compatibilité : On dit que K est compatible avec (E, q) si :

$$\boxed{\forall x \in E \quad x^2 = q(x).1_A}$$

$2b(y, x).1_A = q(x+y).1_A - q(x).1_A - q(y).1_A = (x+y)^2 - x^2 - y^2 =$

$= (x^2 + xy + yx + y^2 - x^2 - y^2 = xy + yx$

$$\boxed{2b(y, x).1_A = xy + yx}$$

Orthogonalité : A une algèbre contenant E et compatible avec E, soient x, y deux vecteurs de E, si $x \perp y$, on a : $2b_q(x, y) = 0$ donc $xy + yx = 0$

$$\boxed{x \perp y \iff xy = -yx}$$

Deux vecteur de E sont ***orthogonaux*** *dans E, s'ils* ***anticommutent*** *dans A*

Inverse d'un anisotrope de E : Soit *x* un élément non nul et ***anisotrope*** de E, c-a-d $q(x) \neq 0_k$. On a : $x^2 = q(x).1_A$, $q(x)$ étant non nul dans K il est inversible :

$\frac{x.x}{q(x)} = 1_A$ donc $x.\frac{x}{q(x)} = 1_A$ ceci prouve que *x* est inversible et que son inverse est $\frac{x}{q(x)}$:

$$\boxed{(x \text{ anisotrope de E}) \iff x^{-1} = \frac{x}{q(x)}}$$

14) ***Interprétation de la réflexion dans A*** : Soit *u* un élément non nul de E, soit τ_u la ***réflexion*** par rapport à *u* anisotrope de E :

$$\tau_u : E \longrightarrow E, x \longmapsto x - \frac{2b_q(x,u)}{q(u)}u$$

$2b_q(x, u) = xu + ux$, on a

$$\tau_u(x) = x \longmapsto x - \frac{2b_q(x,u)}{q(u)} u = x - \frac{xu+ux}{q(u)} u = x - \left(\frac{xu}{q(u)} + \frac{ux}{q(u)}\right) u = x - \frac{xu}{q(u)} u - \frac{ux}{q(u)} u$$

$$= x - x\frac{u}{q(u)} u - \frac{u}{q(u)} xu = x - xu^{-1}u - u^{-1}xu = x - x - u^{-1}xu = -u^{-1}xu .$$

$$\boxed{\tau_u(x) = -u^{-1}xu}$$

Forme Bilinéaire, Forme Hermitienne.

1) ***Forme bilinéaire en général*** : Soit $(K, +, \bullet)$ un corps et E, F des K-ev, une application $b : E \times F \longrightarrow K$ est dite forme bilinéaire si

(Bg) pour tout y de F $b(-,y) : E \longrightarrow K,\ x \longmapsto b(x, y)$ est une forme linéaire

(Bd) pour tout y de F $b(x ; -) : F \longrightarrow K,\ y \longmapsto b(x, y)$ est une forme linéaire

Ainsi :

$$b(-,y)(x) = b(x, y) \quad \text{et} \quad b(x ; -) = b(x, y)$$

2) ***Orthogonalité*** : x de E est dit orthogonal à y pour la forme b ssi :

$$b(x, y) = 0 \text{ , on notera : } x \perp y.$$

N.B. L'orthogonalité est une propriété mutuelle. $x \perp y \Leftrightarrow x \perp y$.

Si A est une partie de E, l'orthogonal de A noté $A^{\perp}$ est l'ensemble des éléments de F orthogonaux à tous les éléments de A.

On définit de même l'orthogonal $B^{\perp}$ d'une patie B de F.

$$A \subset E \Rightarrow A^{\perp} \leq F \quad \text{et} \quad B \subset F \Rightarrow B^{\perp} \leq E$$

Le symbole $\leq$ signifie (sous espace vectoriel)

2) ***Forme bilinéaire sur un espace E*** : Soit $b : E \times E \longrightarrow K$ une forme bilinéaire :

(FBS) On dit que b est une forme bilinéaire symétrique si : $b(x,y) = b(y,x)$

(FBA) On dit que b est une forme bilinéaire symétrique si : $b(x,y) = -b(y,x)$

Nous noterons $\mathfrak{B}(E)$ l'ensemble des formes bilinéaires sur E. Nous remarquons que c'est un K-ev.

Nous noterons $\mathfrak{BS}(E)$ l'ensemble des formes bilinéaires symétriques sur E. Nous remarquons que c'est un K-ev.

Nous noterons $\mathfrak{BA}(E)$ l'ensemble des formes bilinéaires antisymétriques sur E. Nous remarquons que c'est un K-ev.

N.B. Toute forme bilinéaire b se décompose d'une façon unique en somme d'une symétrique et d'une antisymétrique.

$$b(x,y) = \frac{b(x,y)+b(y,x)}{2} + \frac{b(x,y)-b(y,x)}{2}$$

Ici s : $(x,y) \longmapsto \dfrac{b(x,y)+b(y,x)}{2}$ est bilinéaire symétrique

Et a : $(x,y) \longmapsto \dfrac{b(x,y)-b(y,x)}{2}$ est bilinéaire antisymétrique

b = s + a (d'une façon unique) :

Donc : $\mathfrak{B}(E) = \mathfrak{BS}(E) \oplus \mathfrak{BA}(E)$

Nous allons étudier les formes bilinéaires symétriques.

3) Forme ***sesquilinéaire, ou bilinéaire par un automorphisme φ involutif de K*** :

Soit $\varphi : K \longrightarrow K$ un automorphisme involutif de K ($\varphi^2 = Id$), et $b : E\times E \longrightarrow K$ une application. On dit que b est une forme ***φ-bilinéaire*** (ou ***sesquilinéaire par φ***) si :

$$b(x_1 + x_2, y) = b(x_1 , y) + b(x_2, y)$$
$$b(x, y_1 + y_2) = b(x , y_1) + b(x, y_2)$$
$$b(\lambda x, y) = \lambda\, b(x, y)$$
$$b(x, \lambda y) = \varphi(\lambda).\, b(x, y)$$
$$b(x,y) = \varphi(b(y,x))$$

N.B. dans le cas complexe, φ est l'identité Id : $z \longmapsto z$ ou la conjugaison γ : $z \longmapsto \bar{z}$ sont les automorphismes involutifs de $\mathbb{C}$.

Une Id-bilinéaire symétrique est dite bilinéaire symétrique, une γ-bilinéaire symétrique sera dite sesquilinéaire.

N.B. si $K = \mathbb{R}$: il y a les bilinéaires symétriques.

Si $K = \mathbb{C}$: il y a les bilinéaires symétriques et les hermitiennes.

Nous allons remarquer que les réelles bilinéaires symétriques, et les complexes hermitiennes sont les plus importantes.

4) ***Forme quadratique*** : soit $q : E \longrightarrow K$ on dit que q est une forme quadratique sur E si

(Quad1) $q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$

(Quad2) la forme bq définie par $2bq(x, y) = q(x + y) - q(x) - q(y)$ est bilinéaire (sûrement symétrique)

Dans le cas où K de caractéristique non 2 : bq est dite forme polaire de q

5) ***Vecteur isotrope*** : Soit (E, q) un espace vectoriel muni d'une forme quadratique q dont la forme bilinéaire correspondante est b. Un vecteur x est dit isotrope s'il n'est pas nul et s'il est orthogonal à lui-même : $q(x) = 0$ ou $b(x, x) = 0$.

L'ensemble des vecteurs isotropes n'est pas un sous espace de E, (un cône ?)

Un vecteur non isotrope est dit ***anisotrope***.

6) ***Vecteur singulier*** : Un vecteur x est dit singulier si x est orthogonal à tous les vecteurs de E, le noyau de q est l'ensemble des vecteurs singuliers. Noté ***Ker***(q).
Tout singulier non nul est isotrope, la réciproque n'est pas vraie.

7) ***Espace Isotrope et espace singulier*** : un espace (E, q) est dit isotrope, s'il contient un vecteur isotrope (non nul). Un espace (E, q) est dit singulier s'il contient un vecteur singulier (non nul), c'est-à-dire ***Ker***(q) $\neq \{0\}$

8) ***Sous-espace quadratique*** : Soit (E, q) un espace quadratique, tout sous espace F de E peut être muni d'une façon naturelle d'une structure d'espace quadratique (héritée par celle de E) utilisant l'induite de q : $q_F : F \longrightarrow K$ tel que pour tout x de F : $q_F(x) = q(x)$.
C'est de celle-ci que ça va être sous entendu.

9) ***Espace Isotrope et espace singulier, espace régulier*** : Un sous espace F de E est dit isotrope s'il possède un vecteur isotrope (relativement à q_F)
Ainsi si E possède un sous-espace isotrope, lui-même est isotrope.

Un sous espace F de E est dit singulier s'il possède un vecteur singulier (relativement à q_F)
Ainsi si E possède un sous-espace singulier F, il peut ne pas être lui-même singulier. Car un vecteur orthogonal à tous les vecteurs de F n'est pas nécessairement orthogonal à tous les vecteurs de E.

Un sous espace d'un espace singulier n'est pas forcément singulier.
Un sous espace d'un espace isotrope n'est pas forcément isotrope.
Un espace qui ne contient aucun vecteur singulier est dit ***régulier***.
Un espace régulier peut contenir des sous espaces singuliers et des sur espaces singuliers.

10) ***Plan hyperbolique*** : Soit P un K-ev de dimension 2 muni d'une forme quadratique q non dégénérée, on dit que (P, q) est un plan hyperbolique s'il possède un vecteur isotrope.

Couple hyperbolique : Soit (E, q) un espace quadratique non dégénérée, et (u, v) un couple de deux vecteurs non nuls. On dit que ce couple est hyperbolique si chaque vecteur est isotrope, et ne sont pas orthogonaux de produit = 1;

$$q(u) = 0,\ q(v) = 0, \quad b(u, v) = b(v, u) = 1.$$

N.B. pour un couple (u, v) tel que $q(u) = 0,\ q(v) = 0, \quad b(u, v) = b(v, u) \neq 0$
On peut s'arranger pour avoir un couple hyperbolique (u', v) engendrant le même plan en proposant $u' = [b(u, v)]^{-1}.u$

11) ***Théorème*** : Un plan quadratique (E, q) est hyperbolique si et seulement si il a une base de deux vecteurs formant un couple hyperboliques.
Preuve :
La réciproque est évidente : si le plan possède un couple hyperbolique il possède nécessairement un vecteur isotrope.

Maintenant, si u est un vecteur non nul isotrope, q(u) = 0, nous pouvons compléter u en une base (u, w), nous avons ainsi deux cas :

1° ***q(w) = 0*** :

α = b(u, w) ne peut pas être nul : u sera orthogonal à u et à v donc u sera orthogonal à P, u sera un vecteur singulier de q, et q sera dégénérée, contrairement à l'hypothèse.

α = b(u, w) $\neq$ 0 : le vecteur v = $\frac{w}{\alpha}$, vérifie q(v) = q($\frac{w}{\alpha}$) = 0.$\frac{1}{\alpha}$ q(w) = 0.

b(u,v) = b(u$\frac{w}{\alpha}$) = $\frac{1}{\alpha}$ b(u,w) = $\frac{1}{\alpha}$ α = 1

Le couple (u,v) est donc un couple hyperbolique.

2° ***q(w) $\neq$ 0*** :

Il faut trouver un vecteur isotrope linéairement indépendant de u :

Cherchons λ non nul, un scalaire de K, tel que, t = u +λw isotrope :

0 = q(t) = q(u + λw) = b(u + λw, u + λw) = q(u) +2λb(u,w) + λ^2q(w) .

Donc (vu que q(u) = 0)

$$2\lambda b(u,w) + \lambda^2 q(w) = 0$$

Comme λ doit être non nul : 2b(u,w) + λq(w) = 0

$$2\alpha + \lambda q(w) = 0$$

$$\lambda = \frac{-2\alpha}{q(w)}$$

Ainsi t = u +$\frac{-2\alpha}{q(w)}$w est un vecteur non nul isotrope linéairement indépendant de u,

Et non orthogonal à u.

Si l'on pose v = $\frac{t}{b(u,t)} = \frac{u - \frac{2\alpha}{q(w)}w}{b(u, u - \frac{2\alpha}{q(w)}w)} = \frac{u - \frac{2\alpha}{q(w)}w}{-2\alpha . b(u, \frac{w}{q(w)})} = \frac{q(w)u - 2\alpha w}{-2\alpha . b(u,w)} =$

$\frac{q(w)u - 2\alpha w}{-2\alpha^2} = -\frac{q(w)}{2\alpha^2}$ u + $\frac{1}{\alpha}$ w

Ce vecteur vérifie : b(u,v) = b(u, $\frac{t}{b(u,t)}$) = $\frac{b(u,t)}{b(u,t)}$ = 1 Et le couple (u, v) est bien un couple hyperbolique.

12) ***Théorème*** : Soit (P, q) un plans quadratique non dégénérée, alors sont équivalentes :

1° (P, q) est un plan, hyperbolique.

2° –***det***(q) un carré dans K*.

Preuve :

13) ***Le groupe orthogonal*** : Soit (E, q) un espace quadratique non dégénéré, GL(E) le groupe linéaire des automorphisme de E, c'est un sous groupe des bijections (permutations) de E noté E!.

Un automorphisme orthogonal ou ***isométrie*** est un élément de GL(E) tel que $q\circ(u\otimes u) = q$: c'est-à-dire $q(u(x),u(y)) = q(x, y)$

On note $\mathcal{O}_E(q)$ l'ensemble des automorphismes orthogonaux de E, c'est in sous groupe de GL(E) :

$$\mathcal{O}_E(q) \leq GL(E) \leq E!$$

14) ***Isométrie paire et isométrie impaire*** : Soit P = ***Mat***(σ, e) la matrice d'une isométrie σ dans une base e, Cette matrice est inversible car σ est un automorphisme. Si B est la matrice de b_q dans la base e, nous avons B inversible car q est non dégénérée dès le début. Et nous avons par changement de base de e à s(e) , et $q(\sigma (x), \sigma (y)) = q(x,y)$:

$$^tP.B.P = B$$

Par déterminant :

$$\det(B) = \det(^tP.B.P) = \det(^tP).\det(B).\det(P) = \det(P).\det(B).\det(P) = [\det(P)]^2.\det(B)$$

Donc:

$$\det(B) = [\det(P)]^2.\det(B)$$
$$\det(B) - [\det(P)]^2.\det(B) = 0$$
$$\det(B)\{1 - [\det(P)]^2\} = 0$$
$$\det(B)\{1 - \det(P)\}.\{1 + \det(P)\} = 0$$

Comme det(B) n'est pas nul, il ne reste que deux possibilités :

$$\det(P) = -1 \quad \text{et} \quad \det(P) = +1$$

Ainsi : P = ***Mat***(σ, e)
Si det(P) = +1 l'isométrie σ est dite paire.
Si det(P) = –1 l'isométrie σ est dite impaire.

On notera par $\mathcal{O}_{+E}(q)$ l'ensemble des isométries paires de E.

On notera par $\mathcal{O}_{-E}(q)$ l'ensemble des isométries impaires de E.

$\mathcal{O}_{+E}(q)$ est un sous groupe de $\mathcal{O}_E(q)$, ce sous-groupe est distingué d'indice 2.

$$\mathcal{O}_{+E}(q) \lhd \mathcal{O}_E(q) \leq GL(E) \leq E!$$

15) ***Les réflexions*** : Soit σ une isométrie de E, ($\sigma \in \mathcal{O}_E(q)$) on dit que σ est une réflexion ou symétrie par rapport à un hyperplan H si :

Tout x de H est invariant par s, et pour tout x orthogonal à H : σ(x) = – x

$$H = \{x\ E \mid \sigma(x) = x\}$$

Pour tout y non nul de E, E = kK⊕ H ou H est le supplément orthogonal de y.
La symétrie par rapport à H est :

$$\tau_y : E \longrightarrow E\ ;\ x \longmapsto x - 2\frac{b(x,y)}{q(y)}.y$$

Ici $y^\perp = H$, $E = kK \oplus y^\perp$

Nous remarquons que toute réflexion σ est une involution, c'est-à-dire $\sigma\circ\sigma = Id$

16) ***Théorème*** : Soit (E,q) un espace quadratique et s une isométrie involutive :

$$\sigma \in \mathcal{O}_E(q) \text{ et } \sigma\circ\sigma = Id$$

Pour tout s de K notons $E_s(\sigma) = Ker(\sigma + s.Id)$

De sorte que : $E_{+1}(\sigma) = Ker(\sigma + Id)$ et $E_{-1}(\sigma) = Ker(\sigma - Id)$

Alors : E est une somme directe orthogonale : $E = E_{+1}(\sigma) \perp E_{-1}(\sigma)$

Preuve :

17) ***Lemme*** : (E, q) un espace quadratique non dégénéré, u, v deux vecteurs non nuls et non isotropes, et $q(u) = q(v) = \alpha$. ($q(u) = b(u,u)$ et $q(v) = b(v,v)$)

Alors il existe une isométrie $\tau \in \mathcal{O}_E(q)$ tel que : $\tau(u) = v$.

La morale : on passe d'un vecteur non isotrope à un autre non isotrope (ayant même valeur par q) par au moins une isométrie

Preuve :

La preuve est basée sur deux situations que $y = u - v$ soit isotropes ou non : (on pose $z = u + v$)

1° : cas de y non isotrope : $q(y) \neq 0$.

La réflexion τ_y :

Nous remarquons d'abord que

$2b(u, v) = q(u + v) - q(u) - q(v) = q(u + v) - 2\alpha = q(z) - 2\alpha$

$2b(u, -v) = q(u - v) - q(u) - q(v) = q(u - v) - 2\alpha$

Par addition : $0 = q(y) + q(z) - 4\alpha$.

$$q(y) + q(z) = 4\alpha.$$

De même :

$2b(u, v) = q(z) - 2\alpha$ équivaut à : $2\alpha + 2b(u, v) = q(z)$

$2b(u, -v) = q(u - v) - 2\alpha$ équivaut à : $2\alpha - 2b(u, v) = q(y)$

$$\tau_y(u) = u - 2\frac{b(u,y)}{q(y)}.y = u - 2\frac{b(u,u-v)}{q(y)}.(u-v) = u - 2\frac{b(u,u)-b(u,v)}{q(y)}.(u-v) =$$

$$u - \frac{2\alpha - 2b(u,v)}{q(y)}.(u-v) = u - \frac{q(y)}{q(y)}.(u-v) = u - .(u-v) = v$$

2° : cas de y isotrope : $q(y) = 0$.

La réflexion τ_z :

En accord avec le calcul précédent : $q(y) + q(z) = 4\alpha$.

Nous aurons ici : $q(z) = 4\alpha$. Donc z non nul.

Donc :

$$\tau_z(u) = u - 2\frac{b(u,z)}{q(z)}.z = u - 2\frac{b(u,u+v)}{q(z)}.(u+v) = u - 2\frac{b(u,u)+b(u,v)}{q(z)}.(u+v) =$$

$$u - \frac{2\alpha + 2b(u,v)}{q(z)}.(u+v) = u - \frac{q(z)}{q(z)}.(u+v) = u - (u+v) = -v$$

Nous remarquons enfin que $\tau_v(v) = -v$ donc $\tau_v(-v) = v$

D'où :

$$\tau_v \circ \tau_z(u) = v$$

$\tau_v \circ \tau_z$ est une isométrie qui envoie u à v.

18) ***Théorème*** : (E, q) un espace quadratique non dégénéré, alors $\mathcal{O}_E(q)$ est engendré par les réflexions.
Preuve :
La preuve se fait par une récurrence sur la dimension finie de E.

19) ***Espace hyperbolique*** : (E, q) un espace quadratique non dégénéré, on dit que c'est un ***espace hyperbolique***, s'il est somme ***orthogonale*** de ***plans hyperboliques***.

$$E = P_1 \perp P_2 \perp \ldots\ldots \perp P_s \quad \text{avec } (u_i, v_j) \text{ couple hyperbolique de } P_j .$$

Dans la base adaptée e = $(u_1, v_1, u_2, v_2, \ldots\ldots, u_s, v_s)$

$$\boldsymbol{Mat}(q, e) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & & & \\ 1 & 0 & & & & & & \\ & & 0 & 1 & & & & \\ & & 1 & 0 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

On remarque que la dimension de tout espace hyperbolique est paire.

20) ***Théorème*** : (E, q) un espace quadratique non dégénéré, et F un sous espace de E (régulier ou non), alors il existe un sous espace régulier F' de E qui contient F.
Preuve :
D'abord l'appellation ***régulier*** pour F' signifie que (F', $q_{F'}$) est un espace quadratique ***non dégénéré***.

21) ***Théorème*** : (E, q) un espace quadratique non dégénéré, et F, G deus sous espace de E isométriques (ont même dimension, et il existe une isométrie $\sigma : (F, q_F) \longrightarrow (G, q_G)$)
Alors : il existe une isométrie $\overline{\sigma} \in \mathcal{O}_E(q)$ te que σ est la restriction de $\overline{\sigma}$ à F.

$$\sigma = \overline{\sigma}_{|F}$$

Preuve :

22) ***Conséquence du théorème précédent*** :

23) ***Immersion de E dans une algèbre*** : Soit A une K-algèbre contenant E muni d'une forme quadratique *q*.

Compatibilité : On dit que K est compatible avec (E, q) si :

$$\boxed{\forall x \in E \quad x^2 = q(x).1_A}$$

$2b(y, x).1_A = q(x + y)\,.1_A \; - q(x)\,.1_A \; - q(y)\,.1_A = (x + y)^2 - x^2 - y^2 =$

$= (x^2 + xy + yx + y^2 - x^2 - y^2 = xy + yx$

$$\boxed{2b(y, x).1_A = xy + yx}$$

Orthogonalité : A une algèbre contenant E et compatible avec E, soient x, y deux vecteurs de E, si $x \perp y$, on a : $2b_q(x, y) = 0$ donc $xy + yx = 0$

$$\boxed{x \perp y \iff xy = -yx}$$

*Deux vecteur de E sont **orthogonaux** dans E, s'ils **anticommutent** dans A*

24) ***Inverse d'un anisotrope de E*** : Soit x un élément non nul et ***anisotrope*** de E, c-a-d $q(x) \neq 0_k$. On a : $x^2 = q(x).1_A$, $q(x)$ étant non nul dans K il est inversible :

$\dfrac{x.x}{q(x)} = 1_A$ donc $x.\dfrac{x}{q(x)} = 1_A$ ceci prouve que x est inversible et que son inverse est $\dfrac{x}{q(x)}$:

$$\boxed{(\text{x anisotrope de E}) \iff x^{-1} = \frac{x}{q(x)}}$$

25) ***Interprétation de la réflexion dans l'algèbre A*** : Soit u un élément non nul de E, soit τ_u la ***réflexion*** par rapport à u anisotrope de E :

$$\tau_u : E \longrightarrow E,\ x \longmapsto x - \frac{2b_q(x,u)}{q(u)}u$$

$2b_q(x, u) = xu + ux$, on a

$$\tau_u(x) = x \longmapsto x - \frac{2b_q(x,u)}{q(u)}u = x - \frac{xu+ux}{q(u)}u = x - \left(\frac{xu}{q(u)} + \frac{ux}{q(u)}\right)u = x - \frac{xu}{q(u)}u - \frac{ux}{q(u)}u$$

$$= x - x\frac{u}{q(u)}u - \frac{u}{q(u)}xu = x - xu^{-1}u - u^{-1}xu = x - x - u^{-1}xu = -u^{-1}xu\ .$$

$$\boxed{\tau_u(x) = -u^{-1}xu}$$

Remarque :

i) si x commute avec u : $\tau_u(x) = -u^{-1}xu = -u^{-1}ux = -x$.

$$\tau_u(x) = -x$$

ii) si x ***anticommute*** avec u : $\tau_u(x) = -u^{-1}xu = -u^{-1}(-ux) = x$.

$$\tau_u(x) = x$$

Dans ce cas la restriction de cette réflexion à E est l'application identique de E.

Isométrie : $t : (E, q) \longrightarrow (E', q')$ est dite ***isométrie*** si elle conserve la forme bilinéaire :

$$B'_{q'}(\tau(x), \tau(y)) = b_q(x, y)$$

Représentation : $f : K^n \longrightarrow K$ une forme quadratique et $d \in K^\times$. On dit que f représente d si il existe $x \in K^n$ tel que $f(x) = d$.

On note $\mathcal{D}(f)$ l'ensemble des éléments de $K^\times$ représentés par f (plutôt c'est l'image de l'application f)

On remarque que :

$$d \in \mathfrak{D}(f) \text{ et } a^2 \in (K^\times)^2 \Rightarrow da^2 \in \mathfrak{D}(f)$$

En effet si $d = f(x)$ alors $f(ax) = a^2d$ donc a^2d est représenté par d.

$$(K^\times)^2\mathfrak{D}(f) \subset \mathfrak{D}(f)$$

$$K^n \xrightarrow{f} K \xrightarrow{p} K^\times/(K^\times)^2$$

Souvent $\mathfrak{D}(f)$ est remplacé par $p(\mathfrak{D}(f))$

Si f représente d par x de K^n, elle représente d par tout y de xK

xK se note indifféremment $<x>$ ou $<d>$

$$xK = <x> \text{ ou } <d>$$

$$n \leq \dim(K^n) \leq \mathrm{card}(K^\times/(K^\times)^2)$$

26) ***Critère de représentation*** : notons $K^\times/(K^\times)^2$ par $\widetilde{K}$ on a : pour $d \in \widetilde{K}$:

Si E est non régulier Alors $E \cong \mathrm{rad}(E) \oplus W$ avec W régulier, comme les élément de rad(E) ont pour image 0 par f, f(E) = f(W) = $\mathfrak{D}(f)$ et W régulier.

Remarque : Si E est régulier de dimension finie : $E \cong <d> \oplus E'$

En effet supposons que q(v) = d alors $E = Kv \oplus E' = <d> \oplus E'$ comme E est régulier l'orthogonal $<d>^\perp$ est un supplémentaire de $<d>$ donc

$$E = Kv \oplus (Kv)^\perp = <d> \oplus <d>^\perp$$

Réciproquement si $E \cong <d> \oplus E'$ alors $d \in \mathfrak{D}(<d> \oplus E') = \mathfrak{D}(f)$

Conséquence : (par récurrence) $E \cong <d_1> \oplus <d_2> \oplus \ldots\ldots \oplus <d_{n-1}> \oplus <d_n>$, certains d_i Pouvant être nuls.

$$E \cong <d_1> \oplus <d_2> \oplus \ldots\ldots \oplus <d_{p-1}> \oplus <d_p>$$

On note :

$$E \cong <d_1, d_2, \ldots\ldots, d_{p-1}, d_p>$$

Si les d_i sont égaux :

$$E \cong <d,d,\ldots\ldots,d,d> \text{ se note } p<d>$$

26) ***Algèbre de Clifford*** : Soit C une K-algèbre, on dit que c'est une ***algèbre de Clifford*** de la forme quadratique (E, q) si :

(AC1) C est compatible avec (E, q). ($\forall \boldsymbol{x \in E} \quad \boldsymbol{x^2 = q(x).1_A}$)

(AC2) Pour toute algèbre A qui est compatible avec (E, q).

Il existe un unique morphisme d'Algèbre $\varphi : C \longrightarrow A$ dont la ***restreinte réduite*** à E soit l'application identique de E. $\varphi_{\|E} = \mathrm{Id}_E$

C'est une solution d'un problème d'***Application universelle***.

N.B. S'il possède une solution, toutes les autres solutions sont identiques à un isomorphisme près. Il suffit donc d'en donner une.

Une solution : Soit (E, q) un espace quadratique, et soit ***T***(E) l'algèbre tensorielle de E, comme intuitivement $x \otimes x$ peut être considéré comme un carré, il est légitime à priori de rendre ***T***(E) compatible avec (E, q) par :

$$x \text{ élément de E : } x \otimes x \textit{ congrue } q(x).1_{T(E)}$$

Par ailleurs si x est quelconque dans T(E), q(x) n'est pas nécessairement défini, on considère $\mathscr{I}(q)$ l'idéal engendré par les éléments de la forme (x élément de E) :

$$x \otimes x - q(x).1_{T(E)}$$

$$\boxed{\mathscr{I}(q) = (x\otimes x - q(x).1_{T(E)})}$$

L'algèbre quotient T(E)/ $\mathscr{I}(q)$ est une K-algèbre dans laquelle :

$$\mathfrak{Classe}(x \otimes x) - \mathfrak{Classe}(q(x).1_{T(E)}) = \text{ le zéro de } T(E)/ \mathscr{I}(q)$$

Donc

$$T(E)/ \mathscr{I}(q) \text{ est compatible avec } (E, q)$$

Cette algèbre vérifie (AC1), espérons qu'elle vérifie (AC2) on la note C((E, q)), donc essayons de démontrer qu'elle vérifie (AC2) :

$$C((E, q)) = T(E)/ \mathscr{I}(q)$$

A cet effet soit A une autre K-algèbre compatible avec (E, q), il faut inventer un morphisme $\varphi : C \longrightarrow A$ qui coïncide avec l'application *identique* sur E.

27) ***Graduation de T(E)*** : On note $\boldsymbol{T}^0(E) = K$, $\boldsymbol{T}^1(E) = E$, $\boldsymbol{T}^2(E) = \{x\otimes x \mid x \in E\}$,….., $\boldsymbol{T}^k(E) = \{ x\otimes x\otimes \ldots\ldots \otimes x\otimes x \text{ (k fois)} \mid x \in E\}$ et

$$\boxed{\boldsymbol{T}(E) = \boldsymbol{T}^0(E) + \boldsymbol{T}^1(E) + \boldsymbol{T}^2(E) + \ldots\ldots\ldots + \boldsymbol{T}^k(E) + \ \ldots\ldots\ldots}$$

L'image de ceci dans C((E,q)) = T(E)/ $\mathscr{I}(q)$ est

$$\boxed{C((E, q)) = C^1(E) + C^1(E) + C^2(E) + \ldots\ldots\ldots + C^k(E) + \ \ldots\ldots\ldots}$$

On regroupe les paires et les impaires :

$C_0(E, q) =$ la somme des classes des $\boldsymbol{T}^{2k}(E)$

$C((E, q)) = C^0(E) + C^2(E) + \ldots\ldots\ldots + C^{2k}(E) \cup \ \ldots\ldots\ldots$

$C_1(E, q) =$ la somme des classes des $T^{2k+1}(E)$

$C((E, q)) = C^1(E) + C^3(E) + \ldots\ldots\ldots + C^{2k+1}(E) \cup \ \ldots\ldots\ldots$

$C_0(E, q)$ est de nouveau une algèbre sous-algèbre de C, dite *algèbre* ***paire*** *de* ***Clifford.***

28) ***Exemples*** :

Exemple 1 : Soit E = Kx =<x> et la forme quadratique q(x) = a, on a E = <x> = <a>. le produit tensoriel est $x \otimes x = xx$

$\mathscr{I}(q) = (x\otimes x - q(x).1_{T(E)}) = (x^2 - a)$

T(E) = K+ <x> + <xx> + <xxx> +………….= K[x]

Donc $C(E,q) = T(E)/ \mathscr{I}(q) = K[x]/ (x^2 - a) = K<\sqrt{x}>$

Exemple 2 : Soit (E,0) avec forme quadratique nulle :

$\mathscr{I}(q) = (x \otimes x) = (x^2)$

Donc $C(E, 0) = T(E)/ \mathscr{I}(q) = K[x]/ (x^2) = \Lambda(E)$ l'algèbre extérieure de E.

Exemple 3 : Soit ($\mathbb{H}$, q) plan hyperbolique : $\mathbb{H}$ = <x, y> = <a, b> :

$$\mathbb{H} = Kx + Ky = x = a^2 \text{ , } y = b^2 \text{ (avec a, b dans } K^{\times})$$

$C((\mathbb{H},q))$ L'algèbre de ***Clifford*** correspondante est :

$$\left\langle \frac{a,b}{K} \right\rangle = \left\langle \frac{-1,1}{K} \right\rangle = (1, i, j, k) \text{ Est une algèbre } \textbf{\textit{quaternionique}}$$

L'algèbre de ***Clifford*** d'un plan ***Hyperbolique*** sur K est une ***quaternionique*** sur K.

Exemple 4 : Soit (E, q) avec, E = $<x_1, x_2,\dots, x_n>$ avec la base orthogonale $\mathcal{B} = (x_1, x_2,\dots, x_n)$ comme les vecteurs sont orthogonaux, on a vu qu'ils ***anticommutent*** :

$$x_i x_j = -x_j x_i \quad (i \neq j)$$

$$\text{Et } (x_i)^2 = q(x_i).1_C$$

C est engendré par les produits de la forme :

$$(x_1)^{e_1} (x_2)^{e_2} \dots\dots\dots\dots (x_n)^{e_n} \quad (e_i \text{ est 0 ou 1})$$

$$\boxed{\dim(E, q) \leq 2^n.}$$

Remarque : Soit (E, q), (E', q') deux espaces quadratiques : on sait comment définir $(E\perp E', q\perp q')$ et donc l'algèbre de Clifford $C((E\perp E', q\perp q'))$

On a un isomorphisme $\varphi : C((E\perp E', q\perp q')) \longrightarrow C((E, q)) \hat{\otimes} C((E', q'))$

$$C((E\perp E', q\perp q')) \cong C((E, q)) \hat{\otimes} C((E', q'))$$

$$C(E\perp E') \cong C(E) \hat{\otimes} C(E')$$

$$\dim C(E\perp E') \geq \dim C(E) + \dim C(E')$$

$$\dim C(E\perp E') \geq 2^{n-1} + 2^{n-1}$$

$$\dim C(E\perp E') \geq 2\times 2^{n-1}$$

$$\dim C(E\perp E') \geq 2^n$$

$$\text{Mais : } \dim C(E\perp E') \leq 2^n$$

Donc : $\dim C(E\perp E') = 2^n$

Corollaire : $\dim(C_0(E)) = 2^{n-1}$, $\dim(C_1(E)) = 2^{n-1}$

29) ***Réflexion par rapport à un vecteur*** : Soit y un vecteur de (E, q), on définit la réflexion : $\tau_y : E \longrightarrow E$ par $\tau_y(x) = x - \dfrac{2b(x,y)}{q(y)} y$

Il est bien involutif :

$\tau_y(\tau_y(x)) = \tau_y(x - \dfrac{2b(x,y)}{q(y)} y) = \tau_y(x) + \tau_y(-\dfrac{2b(x,y)}{q(y)} y) = \tau_y(x) - \dfrac{2b(x,y)}{q(y)} \tau_y(y) =$

$\tau_y(x) - \dfrac{2b(x,y)}{q(y)} (y - \dfrac{2b(y,y)}{q(y)} y) = \tau_y(x) - \dfrac{2b(x,y)}{q(y)} (y - \dfrac{2q(y)}{q(y)} y) =$

$\tau_y(x) - \dfrac{2b(x,y)}{q(y)} (y - 2y) = \tau_y(x) - \dfrac{2b(x,y)}{q(y)} (-y) = \tau_y(x) + \dfrac{2b(x,y)}{q(y)} y =$

$$x - \frac{2b(x,y)}{q(y)} y + \frac{2b(x,y)}{q(y)} y = x$$
$$\tau_y(\tau_y(x)) = x = Id_E(x)$$
$$\tau_y\tau_y = Id_E$$

On définit l'ensemble des réflexions : $\mathcal{R}ef(E) = \{\tau_y \mid q(y) \text{ non nul}\}$
$\mathcal{R}ef(E)$ est un sou-groupe de $\mathcal{O}(E)$
$$\mathcal{R}ef(E) \leq \mathcal{O}(E)$$
De même pour tout σ de $\mathcal{O}(E)$: $\sigma\, \tau_y\, \sigma^{-1} = \tau_y$:
Preuve :
$(\sigma\, \tau_y\, \sigma^{-1})(x) = \sigma\, \tau_y\, (\sigma^{-1}(x)) = \sigma\, \tau_y\, (\sigma^{-1}x) = \sigma\, (\sigma^{-1}x - \frac{2b(\sigma^{-1}x, y)}{q(y)} y) =$
$x + \sigma\, (-\frac{2b(\sigma^{-1}x, y)}{q(y)} y) = x - \frac{2b(\sigma^{-1}x, y)}{q(y)} \sigma(y) = x - \frac{2b(x, \sigma y)}{q(y)} \sigma(y) =$
$x - \frac{2b(x, \sigma y)}{q(\sigma y)} \sigma(y) = \tau_{\sigma y}(x)$
$$(\sigma\, \tau_y\, \sigma^{-1})(x) = \tau_{\sigma y}(x)$$
$$\sigma\, \tau_y\, \sigma^{-1} = \tau_{\sigma y}$$
Ceci veut dire que $\mathcal{R}ef(E)$ est invariant par les automorphismes intérieurs de $\mathcal{O}(E)$
Il est donc un sous-groupe invariant de $\mathcal{O}(E)$
$$\boxed{\mathcal{R}ef(E) \lhd \mathcal{O}(E)}$$

30) ***Théorème de simplification de Witt*** : Supposons que $(E, q) \perp (E, q_1) \cong (E, q) \perp (E, q_2)$, et M_1, M_2 les matrices symétriques respectives de q_1 et q_2. On a:
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_1 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix}$$
Il existe donc une matrice inversible $E = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ telle que :
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_1 \end{pmatrix} = E^t \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} * & * \\ * & D^t M_2 D \end{pmatrix}$$
Donc $M_1 = D^t M_2 D$ ce qui veut dire $q_1 \cong q_2$.

31) ***Proposition*** : Si x, y sont deux vecteurs non isotrope de (E, q), tel que q(x) = q(y), il existe une transformation orthogonale τ qui envoie l'un sur l'autre.

Preuve : (regarder la preuve dans 17) ***Lemme*** :)
Supposons q(x) = q(y) non nul, z = x – y, et F l'orthogonal de Kz, F est un hyperplan,
$$q(x + y) + q(x - y) = b(x + y, x + y) + b(x - y, x - y) =$$
$$b(x, x) + b(x, y) + b(y, x) + b(y, y) + b(x, x) - b(x, y) - b(y, x) + b(y, y) =$$
$$b(x, x) + b(y, y) + b(x, x) + b(y, y) =$$
$$2b(x, x) + 2b(y, y) =$$

$$2q(x) + 2q(y) =$$
$$4q(x) \text{ non nul.}$$

$q(x + y) + q(x - y) \neq 0$

Donc : $q(x + y)$ ou $q(x - y)$ n'est pas nul.

Supposons $q(x - y)$ non nul, si $\tau(x) = -y$ alors $(-\tau)(x) = y$ donc :

$$\tau_{x-y}(x) = x - \frac{2b(x, x-y)}{q(x-y)}(x-y)$$

$$\tau_{x-y}(x) = x - \frac{2b(x,x) - 2b(x,y)}{q(x-y)}(x-y)$$

$$\tau_{x-y}(x) = x - \frac{2q(x) - 2b(x,y)}{q(x-y)}(x-y)$$

$q(x - y) = b(x - y, x - y) = q(x) + q(y) - 2b(x, y) = 2q(x) - 2b(x, y)$

Donc $\dfrac{2q(x) - 2b(x,y)}{q(x-y)} = 1$, et

$$\tau_{x-y}(x) = x - (x - y)$$
$$\tau_{x-y}(x) = y$$

32) ***Proposition*** : si $q = \langle a, b \rangle$ et $q' = \langle c, d \rangle$ deux formes quadratiques non singulières, alors :

$$q \cong q' \iff \{d(q) = d'(q') : \text{ il existe } c \in K^{\times} \text{ représenté par } q \text{ et } q'\}$$

Equivalence simple : soit $q = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ et $q' = \langle b_1, \ldots, b_n \rangle$

$$q \overset{s}{\cong} q' \iff \{\langle a_i, a_j \rangle = \langle b_i, b_j \rangle \ \ a_k = b_k \text{ pour k différent de i et j }\}$$

Equivalence en chaîne : Soit f, g deux formes diagonales, alors : $f \overset{c}{\cong} g \iff$

Il existe une chaîne $f_0, f_1, \ldots, f_{m-1}, f_m$ tel que $f = f_0$, $g = f_m$ et $f_i \overset{s}{\cong} f_{i+1}$

Exercice : $f \cong g \iff f \overset{c}{\cong} g$

Réduction par la méthode de Gauss : $q(x) = 2x^2 + 2y^2 - z^2 + 5xy - yz + xz = 0$

$q(x) = 2x^2 + 2y^2 - z^2 + 5xy - yz + xz = 2x^2 + x(5y + z) + 2y^2 - z^2 - yz =$

$2[x^2 + \frac{1}{2}x(5y + z) + y^2 - \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{2}yz] =$

$2[x^2 + 2x\frac{1}{4}(5y + z) + \frac{1}{16}(5y + z)^2 - \frac{1}{16}(5y + z)^2 + y^2 - \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{2}yz] =$

$2[(x + \frac{1}{4}(5y + z))^2 - \frac{1}{16}(5y + z)^2 + y^2 - \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{2}yz] =$

$2\frac{1}{16}[16(x + \frac{1}{4}(5y + z))^2 - (5y + z)^2 + 16y^2 - 8z^2 - 8yz] =$

$\frac{1}{8}[(4x + (5y + z))^2 - (5y + z)^2 + 16y^2 - 8z^2 - 8yz] =$

$\frac{1}{8}[(4x + 5y + z)^2 - \{25y^2 + 10yz + z^2 - 16y^2 + 8z^2 + 8yz\}] =$

$\frac{1}{8}$ [(4x + 5y +z)² − {9y² +18yz +9z² }] =

$\frac{1}{8}$ [(4x + 5y +z)² − 9{y² +2yz +z²}] = $\frac{1}{8}$ [(4x + 5y +z)² − 3²(y +z)²] =

$\frac{1}{8}$ [(4x + 5y +z) − 3(y +z)] [(4x + 5y +z) + 3(y +z)] =

$\frac{1}{8}$ [4x + 5y +z −3y −3z] [4x + 5y +z + 3y +3z] =

$\frac{1}{8}$ [4x + 2y −2z] [4x + 8y +4z] = [2x + y −z] [x + 2y +z]

$$\boxed{q(x) = [2x + y - z]\,[x + 2y + z]}$$

q(x) = 0 donne les deux équations :

$$\boxed{(P_1) :\ 2x + y - z = 0 \quad \text{et} \quad (P_2) : x + 2y + z = 0}$$

Ce sont deux plans de l'espace. La surface représentée par q(x) = 0 est la réunion de deux plans :

$$\boxed{(S) = (P_1) \cup (P_2)}$$

On dit que (S) est un ***cône isotrope***.

Quel est l'écart angulaire entre ces deux plans :

Les vecteurs normaux : $\vec{N}_1 = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ et $\vec{N}_2 = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$

L'écart angulaire est l'angle des deux vecteurs normaux :

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{N}_1\vec{N}_2}{\|\vec{N}_1\|\|\vec{N}_2\|} = \frac{2+2-1}{\sqrt{4+1+1}\sqrt{1+4+1}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad \text{donc}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\theta = 60°}}$$

(D) une droite de $\mathbb{R}^3$ et (P) in plan supplémentaire. Notons p la projection sur (D) parallèlement à (P). S la symétrie par rapport à (D) parallèlement à (P) Soit $\vec{u}$ un vecteur unitaire de (D) $\vec{v}$ un vecteur unitaire de (P)

Soit Q = ***Vect***($\vec{u}$, $\vec{v}$) Si $\vec{w}$ est un vecteur de Q il s'écrit : $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$

$p(\vec{w}) = p(x\vec{u} + y\vec{v}) = x\vec{u}$ $\quad s(\vec{w}) = s(x\vec{u} + y\vec{v}) = x\vec{u} - y\vec{v}$

Si θ est l'écart angulaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$: $\|\vec{w}\|^2 = x^2 + 2xy\cos(\theta) + y^2$

$$\|p(\vec{w})\|^2 = x^2 \qquad \|s(\vec{w})\|^2 = x^2 - 2xy\cos(\theta) + y^2$$

$$\|\vec{w}\|^2 = x^2(\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)) + 2xy\cos(\theta) + y^2$$

$$= x^2\sin^2(\theta) + x^2\cos^2(\theta) + 2xy\cos(\theta) + y^2 =$$

$$= x^2\sin^2(\theta) + \{x\cos(\theta) + y\}^2 \geq x^2\sin^2(\theta) = \|p(\vec{w})\|^2 \sin^2(\theta).$$

C'est une égalité lorsque : $x\cos(\theta) + y = 0$ $\quad \sup \frac{\|p(\vec{w})\|}{\|w\|} = \sup \sqrt{\frac{1}{\sin^2(\theta)}} = \frac{1}{\sin(\theta)}$

On en déduit : Si θ_0 est l'angle de (D) et de (P) : (θ_0 est la plus petite valeur θ)

$$\boxed{\|p\| = \frac{1}{\sin(\theta_0)}}$$

Normes équivalentes : Dans $\mathbb{R}^2$ soit $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$, on définit les deux fonctions :

$\|\vec{u}\|_1 = \sqrt{x^2 + xy + y^2}$	$\|\vec{u}\|_2 = \sqrt{x^2 - xy + y^2}$

Montrer que ce sont des normes sur $\mathbb{R}^2$ ***définies positives et équivalentes*** :
La forme quadratique
$q_1(x,y) = x^2 + xy + y^2 = x^2 + 2xy + y^2 - xy = (x+y)^2 - xy$

$(x+y)^2 - (x-y)^2 = 4xy \iff xy = \frac{1}{4}\{(x+y)^2 - (x-y)^2\}$ ceci donne :

$q_1(x,y) = (x+y)^2 - \frac{1}{4}\{(x+y)^2 - (x-y)^2\} = \frac{3}{4}(x+y)^2 + \frac{1}{4}(x-y)^2$

C'est une forme quadratique définie positive. Donc $\|\vec{u}\|_1$ est une norme.

La forme quadratique
$q_2(x,) = x^2 - xy + y^2 = x^2 - 2xy + y^2 + xy = (x-y)^2 + xy$

$q_2(x,y) = (x-y)^2 + \frac{1}{4}\{(x+y)^2 - (x-y)^2\} = \frac{1}{4}(x+y)^2 + \frac{3}{4}(x-y)^2$

C'est une forme quadratique définie positive. Donc $\|\vec{u}\|_2$ est une norme.
Ces normes sont équivalentes si on peut trouver des réels strictement positifs α et β tels que :

$$\boxed{\alpha\|\vec{u}\|_1 \geq \|\vec{u}\|_2 \geq \beta\|\vec{u}\|_1}$$

Ceci équivaut :

$$\boxed{\frac{1}{\beta}\|\vec{u}\|_2 \geq \|\vec{u}\|_1 \geq \frac{1}{\alpha}\|\vec{u}\|_2}$$

En effet :

$q_1(x,) = \frac{3}{4}(x+y)^2 + \frac{1}{4}(x-y)^2$ et $q_2(x,y) = \frac{1}{4}(x+y)^2 + \frac{3}{4}(x-y)^2$

Ceci donne $3q_1(x,) \geq q_2(x,y) \iff \sqrt{3}\,\|\vec{u}\|_1 \geq \|\vec{u}\|_2$.

Et $3q_2(x,y) \geq q_1(x,y) \iff \sqrt{3}\,\|\vec{u}\|_2 \geq \|\vec{u}\|_1 \iff \|\vec{u}\|_2 \geq \frac{1}{\sqrt{3}}\|\vec{u}\|_1$.

En en déduit :

$$\boxed{\sqrt{3}\,\|\vec{u}\|_1 \geq \|\vec{u}\|_2 \geq \frac{1}{\sqrt{3}}\|\vec{u}\|_1}$$

Ici : $\alpha = \sqrt{3}$ et $\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ n calcul simple donne :

$$\boxed{\sqrt{3}\ \|\vec{u}\|_2 \geq \|\vec{u}\|_1 \geq \frac{1}{\sqrt{3}}\ \|\vec{u}\|_2}$$

On remarque :

$$\alpha = \frac{1}{\beta} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{1}{\alpha}$$

Exercice : 1) Montrer des autres expressions :

$q_1(x,y) = (x + \frac{1}{2}y)^2 + \frac{3}{4}y^2$ $q_2(x,y) = (x - \frac{1}{2}y)^2 + \frac{3}{4}y^2$ et calculer a et b correspondants.

2) Montrer que si :

$\|\vec{u}\|_1 = \sqrt{x^2 + xy + y^2}$	$\|\vec{u}\|_2 = \sqrt{2x^2 - xy + y^2}$

On obtient les expressions :

$q_1(x,y) = (x + \frac{1}{2}y)^2 + \frac{3}{4}y^2$ $q_2(x,y) = 2(x - \frac{1}{4}y)^2 + \frac{7}{8}y^2$ et calculer a et b correspondants.

3) Montrer que si :

$\|\vec{u}\|_1 = \sqrt{2x^2 + xy + y^2}$	$\|\vec{u}\|_2 = \sqrt{2x^2 - xy + y^2}$

On obtient les expressions :

$q_1(x,y) = 2(x + \frac{1}{4}y)^2 + \frac{7}{8}y^2$ $q_2(x,y) = 2(x - \frac{1}{4}y)^2 + \frac{7}{8}y^2$ et calculer a et b correspondants.

Montrer qu'il existe dans $\mathbb{R}^n$ n vecteur unitaires $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ **tels que** :

$$\boxed{i \neq j \Rightarrow \|\vec{u}_i - \vec{u}_j\| = 1}$$

$(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n)$ **est-elle une base de $\mathbb{R}^n$?**

$\|\vec{u}_i - \vec{u}_j\| = 1 \iff \|\vec{u}_i - \vec{u}_j\|^2 = <\vec{u}_i - \vec{u}_j | \vec{u}_i - \vec{u}_j> = 1$

$\iff <\vec{u}_i|\vec{u}_i> - <\vec{u}_i|\vec{u}_j> - <\vec{u}_j|\vec{u}_i> + <\vec{u}_j|\vec{u}_j> = 1$

$\iff <\vec{u}_i|\vec{u}_i> - 2<\vec{u}_j|\vec{u}_i> + <\vec{u}_j|\vec{u}_j> = 1$

$\iff \|\vec{u}_i\|^2 - 2<\vec{u}_j|\vec{u}_i> + \|\vec{u}_j\|^2 = 1$ $1 - 2<\vec{u}_j|\vec{u}_i> + 1 = 1$

$\iff <\vec{u}_j|\vec{u}_i> = \frac{1}{2}$ l'écart angulaire est donc 60°. 'est un ensemble de vecteurs tel que entre chaque deux distincts, il y a l'écart 60°.

Par récurrence supposons que $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_{n-1}$ vérifient l'hypothèse :

Soit H = ***Vect***$(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_{n-1})$ et soit $\vec{u}_n = \alpha(\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \ldots + \vec{u}_{n-1}) + \beta\vec{v}$, où $\vec{v}$ est un vecteur unitaire de $H^{\perp}$, on a :

$<\vec{u}_i|\vec{u}_n> = <\vec{u}_i|\alpha(\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \ldots + \vec{u}_{n-1}) + \beta\vec{v}> =$

$\alpha\langle\vec u_i\,|\,\vec u_1\rangle+\alpha\langle\vec u_i\,|\,\vec u_2\rangle+\ldots+\alpha\langle\vec u_i\,|\,\vec u_{n-1}\rangle+\beta\alpha\langle\vec u_i\,|\,\vec v\rangle=$

$\alpha\langle\vec u_i\,|\,\vec u_1\rangle+\alpha\langle\vec u_i\,|\,\vec u_2\rangle+\ldots+\alpha\langle\vec u_i\,|\,\vec u_i\rangle+\ldots+\alpha\langle\vec u_i\,|\,\vec u_{n-1}\rangle=$

$=\alpha(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots+\ldots+\frac{1}{2})=\alpha(\frac{n-2}{2}+1)=\alpha\frac{n}{2}$ devant être $\frac{1}{2}$ donc $\alpha=\frac{1}{n}$

De même $\|\vec u_n\|^2=\langle\vec u_n\,|\,\vec u_n\rangle=$

$\langle\alpha(\vec u_1+\vec u_2+\ldots+\vec u_{n-1})+\beta\vec v\ \,|\,\alpha(\vec u_1+\vec u_2+\ldots+\vec u_{n-1})+\beta\vec v\rangle=$

$\langle\alpha(\vec u_1+\vec u_2+\ldots+\vec u_{n-1})\,|\,\alpha(\vec u_1+\vec u_2+\ldots+\vec u_{n-1})\rangle+\langle\beta\vec v\,|\,\beta\vec v\rangle=$

$\alpha^2\langle(\vec u_1+\vec u_2+\ldots+\vec u_{n-1})\,|\,(\vec u_1+\vec u_2+\ldots+\vec u_{n-1})\rangle+\beta^2\langle\vec v\,|\,\vec v\rangle=$

$(\frac{1}{n})^2((n-1)+\frac{(n-1)(n-2)}{2}\frac{1}{2})+\beta^2$ ce doit valoir 1 :

Du fait qu'on obtient (n–1) carrés de vecteurs unitaires, et $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ produit de vecteurs unitaires distincts, (matrice sans sa diagonale) chaque produit vaut $\frac{1}{2}$.

$$(\frac{1}{n})^2(n-1)(1+\frac{n-2}{4})+\beta^2=1\qquad(\frac{1}{n})^2(n-1)\frac{n+2}{4}+\beta^2=1$$

$$\beta^2=1-(\frac{1}{n})^2(n-1)\frac{n+2}{4}\qquad\beta^2=1-\frac{(n-1)(n+2)}{4n^2}$$

$$\beta^2=\frac{4n^2-(n-1)(n+2)}{4n^2}\qquad\beta^2=\frac{3n^2-n+2}{4n^2}$$

(Le numérateur est positif de par son discriminant –23)

$$\boxed{\beta=\frac{\sqrt{3n^2-n+2}}{2n}}$$

Le système $\vec u_1,\ \vec u_2,\ldots,\ \vec u_n$ est libre : Par récurrence : … Si H

Si $\qquad\gamma_1\vec u_1+\gamma_2\vec u_2+\ldots+\gamma_n\vec u_n=0$ alors :

$\gamma_1\vec u_1+\gamma_2\vec u_2+\ldots+\gamma_n(\alpha(\vec u_1+\vec u_2+\ldots+\vec u_{n-1})+\beta\vec v)=0$

$[\gamma_1+\gamma_n\alpha]\vec u_1+[\gamma_2+\gamma_n\alpha]\vec u_2+\ldots+[\gamma_{n-1}+\gamma_n\alpha]\vec u_{n-1}+\gamma_n\beta\vec v=0$

$\vec v$ Étant orthogonal à H : $[\gamma_1+\gamma_n\alpha]\vec u_1+[\gamma_2+\gamma_n\alpha]\vec u_2+\ldots+[\gamma_{n-1}+\gamma_n\alpha]\vec u_{n-1}=0$

Et $\gamma_n\beta\vec v=0$ comme b et $\vec v$ sont non nuls $\gamma_n=0$

D'après l'hypothèse de récurrence $\vec u_1+\vec u_2+\ldots+\vec u_{n-1}$ sont linéairement indépendants :

$[\gamma_1+\gamma_n\alpha]=0,+[\gamma_2+\gamma_n\alpha]=0,\ldots,[\gamma_{n-1}+\gamma_n\alpha]=0$

Comme maintenant $\gamma_n=0$: $\qquad[\gamma_1]=0,+[\gamma_2]=0,\ldots,[\gamma_{n-1}]=0$

Ce qui achève la démonstration.

Soit E un espace préhilbertien réel, et soit a un élément de E, α,β,γ des nombres réels :

Discuter la nature de l'ensemble ($\mathcal{S}$) d'équation :

$$\boxed{\alpha\|x\|^2+\beta\langle x|a\rangle+\gamma=0}$$